



II РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗОДИНАМИКА

DOI: 10.25558/VOSTNII.2022.70.98.004

УДК 622.272:516.02

© С.В. Черданцев, П.А. Шлапаков, С.И. Голоскоков, К.С. Лебедев, А.Ю. Ерастов,
Е.А. Шлапаков, 2022



С.В. ЧЕРДАНЦЕВ

д-р техн. наук,
главный научный сотрудник
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово
e-mail: svch01@yandex.ru



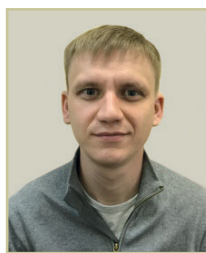
К.С. ЛЕБЕДЕВ

научный сотрудник
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово
e-mail: lebedevks1987@yandex.ru



П.А. ШЛАПАКОВ

канд. техн. наук,
заведующий лабораторией
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово
e-mail: shlapak1978@mail.ru



А.Ю. ЕРАСТОВ

старший научный сотрудник
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово
e-mail: erastov_a_y@mail.ru



С.И. ГОЛОСКОКОВ

канд. техн. наук,
заведующий лабораторией
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово
e-mail: s.goloskokov@nc-vostnii.ru



Е.А. ШЛАПАКОВ

научный сотрудник
АО «НЦ ВостНИИ», г. Кемерово
e-mail: lairxx@yandex.ru

О МАССОПЕРЕНОСЕ РЕАГИРУЮЩЕГО ГАЗА В ВЫРАБОТКЕ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ, ПРОЙДЕННОЙ ПО УГОЛЬНОМУ ПЛАСТУ

При разработке угольных месторождений образуются пылегазовоздушные смеси, которые предрасположены к химическому реагированию, проявляющемуся в форме нормального горения или детонации. Первой стадией любого химического реагирования является массоперенос реагирующего газа к смеси, осуществляемый посредством молекулярной диффузии. Особенностью химического реагирования в горных выработках является наличие двух зон, в одной из которых происходит химическая реакция окисления углерода, а в другой протекает восстановление углекислоты. Поскольку указанные зоны пространственно разделены, то процессы, происходящие в них, можно рассматривать по отдельности. При этом в зоне окисления углерода можно не учитывать процесс горения окиси углерода, однако необходимо учитывать изменение концентрации реагирующего газа как в плоскости поперечного сечения выработки, так и вдоль ее продольной оси. Это обстоятельство существенно усложняет решение задач о химическом реагировании смесей в горных выработках по сравнению с реагированием отдельных угольных частиц. Поэтому в данной работе рассматривается пространственная осесимметричная задача о массопереносе реагирующего газа, в которой учитывается не только молекулярная диффузия, но и конвективный массоперенос, обусловленный скоростью течения газа. В процессе решения краевой задачи методом разделения переменных найдены собственные значения и соответствующие им собственные функции, описывающие массоперенос реагирующего газа в горной выработке. Построены графики изменения концентрации реагирующего газа к стенкам выработки и вдоль ее оси и выявлены некоторые закономерности.

Ключевые слова: ГОРНЫЕ ВЫРАБОТКИ, ГАЗОВОЗДУШНЫЕ СМЕСИ, МОЛЕКУЛЯРНАЯ ДИФФУЗИЯ, КОНВЕКЦИЯ, КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СМЕШАННОГО ТИПА, МЕТОД ФУРЬЕ, ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ.

Введение. Угольная пыль, являющаяся непременным атрибутом отработки угольных пластов, проявляет себя по-разному. С одной стороны, оседая в выработанном пространстве, она образует угольные скопления, которые при определенных теплофизических условиях формируются в очаги самонагрева [1], характеризующиеся повышенной температурой и являющиеся тепловыми источниками, которые приводят к изменению температурного поля в угольных целиках и выработанном пространстве, в том числе и пород, окружающих горные выработки [2, 3]. Это означает, что внутри самой выработки могут существовать области, в которых температура существенно выше, чем в других частях выработки.

С другой стороны, взвешенная и витающая в рудничной атмосфере угольная пыль, взаимодействуя с атмосферой горных выработок, образует пылегазовоздушные смеси,

которые в обычных шахтных условиях, как правило, не вступают в химические реакции. Однако наличие близости очагов самонагрева существенно увеличивает температуру смесей. С течением времени в смеси начинается самопроизвольное химическое реагирование, в связи с чем, температура смеси повышается [4]. Дальнейшее развитие процесса зависит от соотношения между тепловыделением и теплоотводом.

Если в результате протекания термохимической реакции тепловыделение в рассматриваемой области превысит теплоотвод в окружающий массив, то наступит прогрессирующее повышение температуры, что приведет к переходу от медленного реагирования к очень быстрому реагированию [5].

В результате этого может произойти самовоспламенение или зажигание смеси от искры при коротких замыканиях или от трения

работающих частей машин и инструментов. Передача тепла из зоны источника зажигания посредством теплопроводности и диффузии горячих продуктов сгорания обеспечивает высокий нагрев смеси, и последующее воспламенение прилегающих к очагу зажигания слоев свежей смеси. В этом случае воспламенение осуществляется в процессе нормально-го распространения пламени [6, 7].

При высоких температурах самовоспламенение пылегазовоздушной смеси завершается взрывом, а горение в этом случае носит периодический характер. Это обстоятельство было подтверждено в работе [8], авторы которой выявили предрасположенность угольной пыли к образованию взрывчатой смеси в рудничной атмосфере. В ходе экспериментальных исследований они обнаружили, что при определенных соотношениях уголь – окислитель наблюдается двухстадийный характер взрыва. В ходе математического моделирования авторы выявили, что если в определенный момент времени сложились условия воспламенения, то одновременно при наличии горючей среды и окислителя возникает источник зажигания, а возгорание смеси происходит в режиме дефлаграционного горения.

Процесс дефлаграционного горения мелкодисперсных пылегазовоздушных смесей подробно обсуждался в работах [9–11]. В частности, в статьях [9, 10] рассмотрен процесс горения смесей в кинетической области и выявлены критические условия их горения в атмосфере выработок. А в статье [11] исследованы режимы горения мелкодисперстных смесей в диффузионной области.

В работе [12] экспериментально исследована скорость ламинарного пламени в облаках пыли в зависимости от физико-химических параметров пыли и газодинамических условий распространения пламени. Выявлены наиболее значимые причины неустойчивости ламинарного пламени и процессы перехода в турбулентный режим горения пыли.

В статье [13] представлены формулы для определения нормальной скорости распространения пламени, представлены зависимости скорости от концентраций горючего и

окислителя и от диаметра частиц. Установлены влияние радиационной теплопередачи и седиментации частиц на процесс распространения пламени.

Авторы работы [14] учли влияние излучения на формирование в пылегазовоздушной смеси гетерогенного горения и доказали, что его роль невелика. Причем влияние излучения ослабляется процессом сублимации углерода, ограничивающим увеличение температуры частиц.

В работе [15] обсуждается стационарный процесс диффузии окислителя к угольной частице, имеющей внутреннюю поверхность, обусловленную системой пор и трещин. Рассмотрены две краевые задачи, первая из которых описывает процесс диффузии окислителя к внешней поверхности угольной частицы, а вторая задача описывает процесс диффузии внутри объема угольной частицы. В ходе решения задач установлены закономерности изменения концентрации окислителя внутри угольной частицы. Показано, что при малых значениях начального радиуса частицы краевые задачи можно объединить.

Вместе с тем отметим, что процесс горения отдельных угольных частиц нам представляется хотя и важным, но весьма схематичным, поскольку не отвечает в полной мере реальным условиям горения пылегазовоздушных смесей в горных выработках. Во-первых, если процесс горения происходит в горной выработке, то состав продуктов горения сильно зависит от величины температуры в выработке. Во-вторых, весьма существенное влияние на процесс горения влияет скорость течения пылегазовоздушной смеси [6, 7]. В-третьих, отличительной особенностью области горения в горных выработках является наличие двух зон, первую из которых называют окислительной (кислородной) зоной, а вторую — восстановительной зоной, в которой происходит восстановление углекислоты.

Благодаря тому, что при горении в горной выработке окислительная и восстановительная зоны пространственно разделены, можно эти процессы рассматривать по отдельности и при этом в кислородной зоне учитывать

лишь основной гетерогенный процесс потребления кислорода на поверхности углерода и процесс объемного догорания окиси углерода, а в восстановительной зоне — процесс восстановления CO_2 . При этом в кислородной зоне, ввиду малости содержания окиси углерода в продуктах горения, не обязательно во всех задачах учитывать процесс её горение, что существенно упрощает их решение. Однако, с другой стороны, в этих задачах необходимо учитывать изменение концентрации кислорода вдоль выработки, что, наоборот, усложняет их решение.

При постановке и решении задачи о массопереносе реагирующего газа в горной выработке в данной статье приняты следующие допущения:

1) химическая реакция горения предполагается гетерогенной одноступенчатой реакцией окисления, протекающей без учета промежуточных реакций;

2) исходные реагенты и продукты реакции являются идеальными газами;

3) рассматривается изотермический процесс химического реагирования;

4) течение смеси по горной выработке круглого поперечного сечения происходит в ламинарном режиме.

Постановка задачи. При протекании гетерогенной реакции окисления подвод реагирующего газа осуществляется посредством молекулярной, конвективной и тепловой диффузии, характеризуемой вектором плотности \vec{I} , определяемым по формуле [6, 7]:

$$\vec{I} = -D\nabla C + \vec{v}C - \chi D\nabla T, \quad (1)$$

где ∇ и \vec{v} — являются соответственно оператором Гамильтона и вектором скорости воздушного потока в горной выработке:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{i}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{i}_z, \quad \vec{v} = v_x \vec{i}_x + v_y \vec{i}_y + v_z \vec{i}_z,$$

$\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z$ — направляющие единичные векторы декартовых координат x, y, z ; T — температура реагирующего газа (кислорода); C — его концентрация, являющаяся искомой

функцией координат x, y, z и времени t ; D — коэффициент диффузии определяется по формуле [7]:

$$D = D_n \left(\frac{T}{T_0} \right)^m \frac{p_n}{p}, \quad (2)$$

где D_n — коэффициент диффузии при нормальных температуре T_n и давлении p_n , а $m = 1,5 \div 2$ — показатель степени. Величина χ представляет собой коэффициент термодиффузии.

Учитывая допущение об изотермичности процесса, температура и давление в различных точках рассматриваемой области примерно одинаковы $T \approx T_n, p \approx p_n$, из чего следует, что

$$\nabla T = 0, \quad D = D_n = \text{const},$$

в силу чего формула (1) упрощается:

$$\vec{I} = -D\nabla C + \vec{v}C. \quad (3)$$

Подвод реагирующего газа в зону реакции приводит к изменению его концентрации C в единицу времени в единице объема. Скорость изменения концентрации C определяется не только диффузией и конвекцией, но и скоростью химической реакции горения, характеризуемой величиной q , которую можно рассматривать как «источник» (или «сток»).

Приравняв это изменение в рассматриваемой области V соответствующему притоку или расходу вещества за произвольный промежуток времени, имеем [5–7]

$$\int_V \frac{\partial C}{\partial t} dV = \int_V q dV - \int_S \vec{I} \cdot \vec{n} dS, \quad (4)$$

где t — время; \vec{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности S , являющейся границей рассматриваемой области V , а точкой обозначена операция скалярного произведения векторов. Затем, подставляя в равенство (4) формулу (3) и учитывая, что внутри рассматриваемой области нет источников и стоков ($q = 0$), получим равенство:

$$\int_V \frac{\partial C}{\partial t} dV = \int_S (D\nabla C - \vec{v}C) \cdot \vec{n} dS. \quad (5)$$

Используя формулу Остроградского – Гаусса [16], приведем интеграл по поверхности к интегралу по области

$$\int_S (D\nabla C - \vec{v}C) \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot (D\nabla C - \vec{v}C) dV,$$

а затем правую часть полученного равенства преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} & \int_V [D\nabla \cdot (\nabla C) - \nabla \cdot (\vec{v}C)] dV = \\ & = \int_V \{ D\nabla^2 C - [(\nabla \cdot \vec{v})C + \vec{v} \cdot \nabla C] \} dV = \\ & = \int_V (D\nabla^2 C - \vec{v} \cdot \nabla C) dV, \end{aligned} \quad (6)$$

где мы учли условие несжимаемости газа при малых скоростях его движения [17]:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Подставив формулу (6) в равенство (5), получим уравнение:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\nabla^2 C - \vec{v} \cdot \nabla C, \quad (7)$$

описывающее диффузию реагирующего газа в зону реакции, в котором ∇^2 является оператором Лапласа [16]

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

В качестве дополнительного допущения будем полагать процесс массопереноса реагирующего газа стационарным, и учитывая, что движение смеси происходит в направлении оси x , являющейся осью выработки, имеем $\partial C / \partial t = 0$, $v_z = v_y = 0$. Следовательно, второе слагаемое в правой части (7), характеризую-

щее конвективный перенос смеси, представляется в виде:

$$\vec{v} \cdot \nabla C = v_x i_x \cdot \left(\frac{\partial C}{\partial x} i_x + \frac{\partial C}{\partial y} i_y + \frac{\partial C}{\partial z} i_z \right) = v_x \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (8)$$

Учитывая, что рассматриваемая выработка имеет круглое поперечное сечение, представляется удобным перейти в уравнении (7) от декартовых координат x, y, z к цилиндрическим координатам r, φ, x , которые связаны между собой следующими соотношениями [16]

$$z = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad x = x, \quad (9)$$

в силу чего оператор Лапласа в цилиндрических координатах представляется в виде:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (10)$$

И тогда уравнение (7) с учетом формулы (8) перепишем следующим образом:

$$D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) - v_x \frac{\partial C}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

Анализируя уравнение (11), отметим, что искомая концентрация реагирующего газа является функцией трех переменных r, φ, x . Однако, ввиду течения смеси в ламинарном режиме закручивания потока относительно оси выработки не происходит и поэтому искомая концентрация не зависит от координаты φ и, следовательно,

$$\frac{\partial C}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 C}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (12)$$

Далее мы сравним два слагаемых, входящих в уравнение (11):

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v_x \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (13)$$

первое из которых характеризует молекуляр-

ную диффузию реагирующего газа вдоль выработки, а второе — его конвективный перенос. Выполнив элементарные операции в (13), получим следующее выражение:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} - v_x C \right) = v_x \frac{\partial}{\partial x} \left[C \left(\frac{D}{v_x} \frac{\partial C}{\partial x} - 1 \right) \right]. \quad (14)$$

Полагая, что $\partial C / \partial x \approx C$, $D = 10^{-4}$ м²/с, $v_x = 1$ м/с и подставляя в формулу (14), получим:

$$v_x \frac{\partial}{\partial x} \left[C(10^{-4} - 1) \right] \cong -v_x \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (15)$$

Таким образом, с учетом формул (12) и (15) уравнение (11) представляется в виде:

$$D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} \right) - v_x \frac{\partial C}{\partial x} = 0. \quad (16)$$

Для уравнения (16) должна быть обязательно поставлена краевая задача, заключающаяся в том, что искомая функция $C = C(x, r)$ должна удовлетворять граничным условиям, которые сформулируем из следующих соображений.

Полагая, что в начальном сечении выработки концентрация реагирующего газа равна начальному значению C_0 , мы можем записать формулу:

$$C|_{x=0} = C_0, \quad (17)$$

представляющую собой граничное условие Дирихле, которое справедливо при любом значении координаты r , в том числе при $r = 0$.

Учитывая, что скорость диффузии реагирующего газа и скорость химической реакции на любом элементе поверхности выработки равны и полагая первый порядок химической реакции, запишем равенство [5]:

$$-D \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=R} = k C_S, \quad (18)$$

представляющее собой граничное условие Неймана [18], в котором C_S — концентрация реагирующего газа на поверхности выработки, радиус которой R , а коэффициент k представляет собой константу скорости реакции, определяемую по формуле Аррениуса [5]:

$$k = k_0 e^{-E/\mathfrak{R}T}, \quad (19)$$

где $\mathfrak{R} = 8.314$ Дж/(моль·К) — газовая постоянная; E — энергия активации, которой должна обладать молекула, чтобы прореагировать; k_0 — предэкспоненциальный множитель; T — абсолютная температура, при которой протекает химическое реагирование. В силу третьего допущения температура является постоянной величиной.

Таким образом, для определения искомой функции, характеризующей концентрацию реагирующего газа, сформулирована математическая задача, состоящая из дифференциального уравнения (16) в частных производных второго порядка и двух граничных условий: Дирихле (17) и Неймана (18), в связи с чем данная задача принадлежит классу краевых задач смешанного типа [18].

Построение решения краевой задачи. Для отыскания решения краевой задачи (16) – (18) воспользуемся методом Фурье [18], сущность которого заключается в разделении переменных в уравнении (16).

Для этой цели представим искомую функцию $C(r, x)$ в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной:

$$C(r, x) = C(r)C(x). \quad (20)$$

Подставив формулу (20) в уравнение (16) и затем, разделив его на произведение функций $C(r)C(x)$, придем к равенству:

$$\frac{1}{C(r)} \frac{\partial^2 C(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r \cdot C(r)} \frac{\partial C(r)}{\partial r} = \frac{v_x}{D} \frac{1}{C(x)} \frac{\partial C(x)}{\partial x}, \quad (21)$$

левая часть которого зависит только от r , а правая — только от x . Равенство (21) имеет место только в том случае, если обе его части равны постоянной величине, которую обо-

значим $-\lambda_n^2$. В этом случае равенство (21) распадается на два независимых друг от друга обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{v_x}{D} \frac{1}{C_n(x)} \frac{dC_n(x)}{dx} = -\lambda_n^2, \quad (22)$$

$$\frac{1}{C_n(r)} \frac{d^2 C_n(r)}{dr^2} + \frac{1}{r \cdot C_n(r)} \frac{dC_n(r)}{dr} = -\lambda_n^2, \quad (23)$$

где параметр λ_n , подлежащий определению, имеет размерность [1/м], а значения $n = 0, 1, \dots, \infty$. В связи с этим количество параметров λ_n в уравнениях (22), (23) бесчисленное множество, причем каждому λ_n соответствует только одна искомая функция C_n , которую называют собственной функцией, а λ_n — собственным значением [18].

Разделив в уравнении (22) переменные и проинтегрировав его, получим выражение:

$$\int \frac{dC_n(x)}{C_n(x)} = -\lambda_n^2 \frac{D}{v_x} \int dx + \ln a,$$

из которого найдем:

$$C_n(x) = a \cdot e^{-\lambda_n^2 \frac{D}{v_x} x}, \quad (24)$$

где далее постоянную интегрирования примем $a = 1$.

Уравнение (23) сначала представим в виде:

$$\frac{d^2 C_n(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dC_n(r)}{dr} + \lambda_n^2 \cdot C_n(r) = 0, \quad (25)$$

а затем преобразуем его, с помощью новой переменной ζ , связанной с r следующим образом:

$$\zeta = \frac{r}{R} \cdot \bar{\lambda}_n, \quad (26)$$

где

$$\bar{\lambda}_n = \lambda_n R. \quad (27)$$

Как следует из формулы (26), переменная ζ принадлежит отрезку $\zeta \in [0; \bar{\lambda}_n]$, причем, если $r = R$, то $\zeta = \bar{\lambda}_n$.

Учитывая формулы (26) и (27), найдем производные в уравнении (25):

$$\frac{dC_n(r)}{dr} = \frac{dC_n(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dr} = \frac{dC_n(\zeta)}{d\zeta} \cdot \frac{\bar{\lambda}_n}{R} = \frac{dC_n(\zeta)}{d\zeta} \cdot \lambda_n,$$

$$\frac{d^2 C_n(r)}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{dC_n(r)}{dr} \right) = \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{dC_n(r)}{dr} \right) \frac{d\zeta}{dr} =$$

$$= \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{dC_n(\zeta)}{d\zeta} \cdot \lambda_n \right) \lambda_n = \frac{d^2 C_n(\zeta)}{d\zeta^2} \lambda_n^2$$

и, подставив их в уравнение (25), после преобразования придем к уравнению:

$$\frac{d^2 C_n(\zeta)}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{dC_n(\zeta)}{d\zeta} + C_n(\zeta) = 0, \quad (28)$$

представляющему собой уравнение Бесселя нулевого порядка [18], решением которого является функция $C_n(\zeta)$:

$$C_n(\zeta) = A_n J_0(\zeta) + B_n Y_0(\zeta), \quad (29)$$

содержащая постоянные интегрирования A_n , B_n и функции Бесселя нулевого порядка $J_0(\zeta)$, $Y_0(\zeta)$ соответственно первого и второго рода. К настоящему времени функции Бесселя хорошо изучены, а их значения имеются в справочниках по математике, а также встроены в современные интегрированные системы вычислительной и символьной математики [19].

Подставив найденные решения (24) и (29) в формулу (20), получим:

$$C_n(\zeta, x) = C_n(\zeta) C_n(x) = [A_n J_0(\zeta) + B_n Y_0(\zeta)] \cdot e^{-\lambda_n^2 \sigma \frac{x}{R}}, \quad (30)$$

где обозначено

$$\sigma = \frac{D}{v_x R}. \quad (31)$$

Из анализа формулы (30) вытекает, что независимо от значения x при $r \rightarrow 0$ переменная ζ также стремится к нулю и поэтому функция Бесселя $Y_0(\zeta)|_{\zeta \rightarrow 0} \rightarrow -\infty$, в силу чего функция $C_n(r, x)|_{r \rightarrow 0} \rightarrow -\infty$, в то время, как она является ограниченной и принадлежит интервалу $C_n(r, x) \in [0; C_0]$.

Чтобы исключить эту неопределенность, положим в формуле (29) постоянную интегрирования $B_n = 0$, в связи с чем формула (30) приобретает вид:

$$C_n(\zeta, x) = A_n J_0(\zeta) \cdot e^{-\bar{\lambda}_n^2 \sigma \frac{x}{R}}. \quad (32)$$

а решение краевой задачи с учетом формулы (26) представляется в виде бесконечного ряда, состоящего из показательных функций и функций Бесселя:

$$\begin{aligned} C(\zeta, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{r}{R} \bar{\lambda}_n, x \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left(\frac{r}{R} \bar{\lambda}_n \right) \cdot e^{-\bar{\lambda}_n^2 \sigma \frac{x}{R}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Для определения постоянной A_n воспользуемся граничным условием (17), в которое подставим найденное решение (33):

$$C_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left(\frac{r}{R} \bar{\lambda}_n \right)$$

и перепишем его следующим образом:

$$\begin{aligned} C_0 &= A_1 J_0 \left(\frac{r}{R} \bar{\lambda}_1 \right) + A_2 J_0 \left(\frac{r}{R} \bar{\lambda}_2 \right) + \dots \\ &\dots + A_i J_0 \left(\frac{r}{R} \bar{\lambda}_i \right) + \dots \end{aligned} \quad (34)$$

Далее умножим обе части полученного равенства на величину $r \cdot J_0 \left(r / R \cdot \bar{\lambda}_n \right)$ и проинтегрируем в пределах радиуса выработки:

$$C_0 \int_0^R r J_0 \left(\frac{r}{R} \bar{\lambda}_n \right) dr = \int_0^R \left[A_1 J_0 \left(\frac{r}{R} \bar{\lambda}_1 \right) + \dots \right]$$

$$\begin{aligned} &+ A_2 J_0 \left(\frac{r}{R} \bar{\lambda}_2 \right) + \dots + A_k J_0 \left(\frac{r}{R} \bar{\lambda}_i \right) + \dots \Big] \cdot \\ &\cdot r J_0 \left(\frac{r}{R} \bar{\lambda}_k \right) dr. \end{aligned} \quad (35)$$

Интеграл в левой части равенства (35) представляется в виде [18, 19]:

$$\int_0^R r J_0 \left(\frac{r}{R} \bar{\lambda}_n \right) dr = \frac{R^2}{\bar{\lambda}_n} J_1(\bar{\lambda}_n), \quad (36)$$

а для нахождения интегралов в правой части равенства (35) воспользуемся свойством ортогональности функций Бесселя [18]:

$$\begin{aligned} &\int_0^R r J_0 \left(\frac{r}{R} \bar{\lambda}_i \right) J_0 \left(\frac{r}{R} \bar{\lambda}_n \right) dr = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq n, \\ \frac{R^2}{2} \left[J_0^2(\bar{\lambda}_n) + J_1^2(\bar{\lambda}_n) \right], & \text{если } i = n, \end{cases} \end{aligned} \quad (37)$$

Подставив полученные формулы (36) и (37) в равенство (35), приходим к следующему равенству:

$$C_0 \frac{R^2}{\bar{\lambda}_n} J_1(\bar{\lambda}_n) = A_n \frac{R^2}{2} \left[J_0^2(\bar{\lambda}_n) + J_1^2(\bar{\lambda}_n) \right],$$

из которого находим постоянную A_n :

$$A_n = \frac{2C_0 J_1(\bar{\lambda}_n)}{\left[J_0^2(\bar{\lambda}_n) + J_1^2(\bar{\lambda}_n) \right] \cdot \bar{\lambda}_n}. \quad (38)$$

Для определения собственных значений $\bar{\lambda}_n$ воспользуемся граничным условием (18), подставляя в которое формулу (33) и учитывая, что

$$\frac{d[J_0(\zeta)]}{d\zeta} = -J_1(\zeta),$$

приходим к уравнению:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[J_1(\bar{\lambda}_n) \bar{\lambda}_n - \frac{kR}{D} J_0(\bar{\lambda}_n) \right] \cdot e^{-\bar{\lambda}_n^2 \sigma \frac{x}{R}} = 0,$$

которое удовлетворяется при условии, что выражение в скобках тождественно равно нулю

$$J_1(\bar{\lambda}_n) \cdot \bar{\lambda}_n - \Omega \cdot J_0(\bar{\lambda}_n) = 0, \quad (39)$$

где

$$\Omega = \frac{kR}{D}. \quad (40)$$

Полученное уравнение (39) относительно собственных значений $\bar{\lambda}_n$ является трансцендентным, найти решение которого в аналитическом виде не представляется возможным. Поэтому для решения уравнения (39) мы воспользовались графическим методом.

Подставив далее в выражение (38) формулу

$$J_1(\bar{\lambda}_n) \cdot \bar{\lambda}_n = \Omega \cdot J_0(\bar{\lambda}_n), \quad (41)$$

вытекающую из уравнения (39), преобразуем (38) к виду

$$A_n = \frac{2C_0 \cdot \Omega}{J_0(\bar{\lambda}_n) \cdot (\bar{\lambda}_n^2 + \Omega^2)},$$

с учетом которой формула (33) принимает окончательный вид:

$$C \left(\frac{r}{R} \bar{\lambda}_n, x \right) = 2\Omega C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\frac{r}{R} \bar{\lambda}_n \right)}{J_0(\bar{\lambda}_n)} \cdot \frac{e^{-\bar{\lambda}_n^2 \sigma \frac{x}{R}}}{\bar{\lambda}_n^2 + \Omega^2} \quad (42)$$

и представляет собой искомое решение рассматриваемой краевой задачи.

Обсуждение полученных результатов

На базе полученного решения (42) в статье выполнены вычислительные процедуры при следующих исходных данных: $R = 1,15$ м; $v_x = 5$ м/с; $C_0 = 0,23$ кг/м³; $D = 0,4 \cdot 10^{-3}$ м²/с; $k_0 = 3,5 \cdot 10^3$ м/с; $E = 103,4 \cdot 10^3$ Дж/моль; $\Re = 8,314$ Дж/(моль·К); $T = 1273$ °К.

Вычисления начнем с определения параметров k и σ по формулам (19) и (31):

$$k = 3,5 \cdot 10^3 \cdot e^{-103,4 \cdot 10^3 / 8,314 \cdot 1273} = 0,2 \text{ м/с},$$

$$\sigma = \frac{0,4 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 1,15} = 6,957 \cdot 10^{-5}, \quad (43)$$

а затем по формуле (40) определим параметр Ω :

$$\Omega = \frac{kR}{D} = \frac{0,2 \cdot 1,15}{0,4 \cdot 10^{-3}} = 575.$$

Далее сформируем функцию $y(\bar{\lambda})$, представляющую собой левую часть уравнения (39):

$$y(\bar{\lambda}) = J_1(\bar{\lambda}_n) \cdot \bar{\lambda}_n - \Omega \cdot J_0(\bar{\lambda}_n). \quad (44)$$

и построим ее графики $y_1(\bar{\lambda})$, $y_2(\bar{\lambda})$, $y_3(\bar{\lambda})$ (рис. 1) при значениях константы скорости реакции соответственно $k = 0,2$ м/с, $k = 0,82$ м/с, $k = 1,2$ м/с.

Все три графика пересекают ось абсцисс в одних и тех же точках. Следовательно, распределение собственных чисел $\bar{\lambda}_n$ на оси абсцисс не зависит от значения безразмерного параметра Ω . Зная собственные значения $\bar{\lambda}_n$, сформируем соответствующие им собственные функции $J_0(r/R \cdot \bar{\lambda}_n)$ и составим приближенное решение рассматриваемой задачи, удерживая в формуле (42) различное число членов ряда.

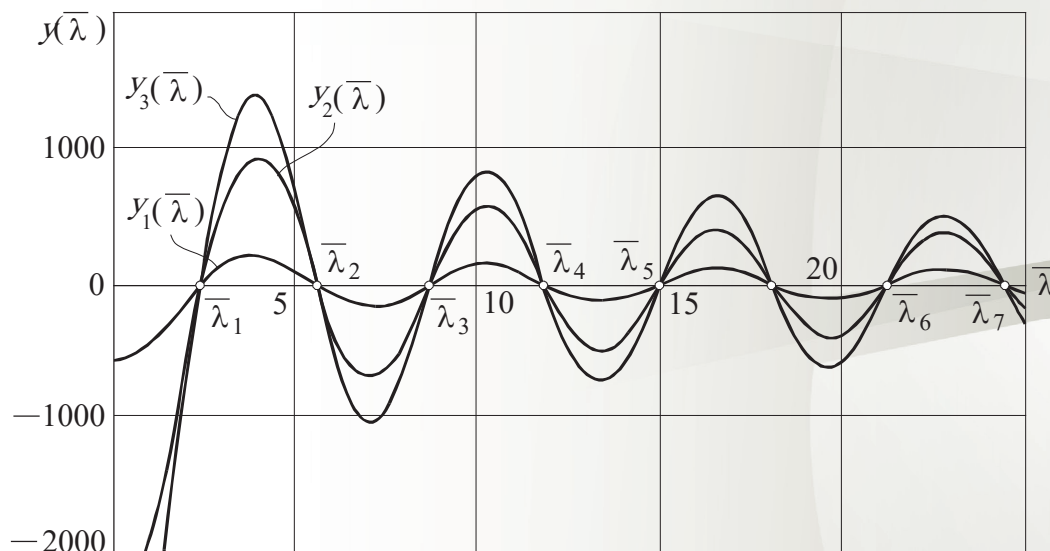


Рис. 1. Отыскание собственных значений $\bar{\lambda}_n$ графическим методом

На рис. 2 показаны графики распределения концентрации реагирующего газа в поперечном сечении выработки на расстоянии 2 м

от начала координат. Для построения графиков в формуле (42) удержано различное количество членов ряда.

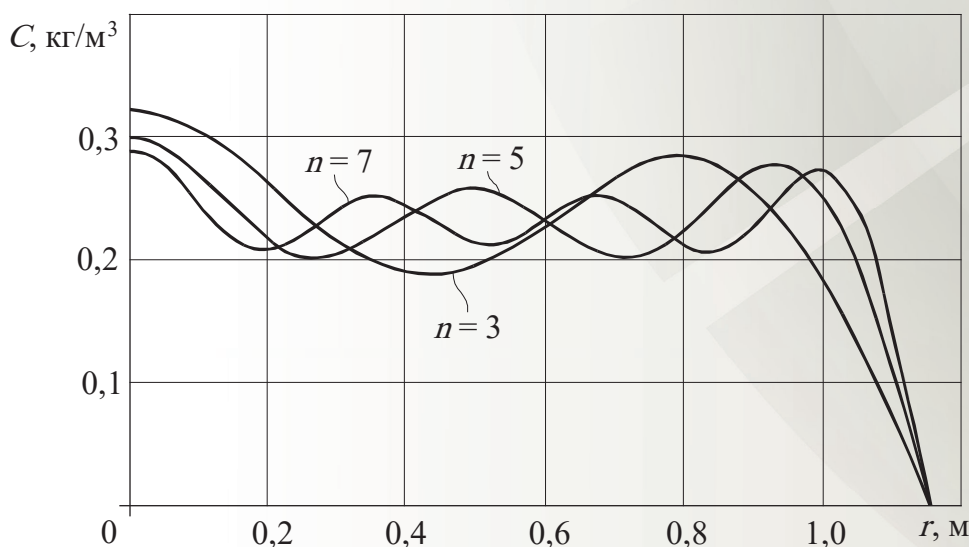


Рис. 2. Графики зависимости концентрации реагирующего газа в поперечном сечении выработки при различном числе удержанных членов ряда в формуле (42)

Анализ графиков на рис. 2 показал, что значения искомой функции при удержании в (42) пяти и семи членов ряда мало отличаются друг от друга. Поэтому дальнейший анализ искомой функции мы выполнили при удержании в формуле (42) пяти членов.

Распределение концентрации реагирующего газа вдоль выработки иллюстрируют графики на рис. 3, показывающие, что по мере удаления от начала координат вглубь выработки концентрация реагирующего газа снижается.

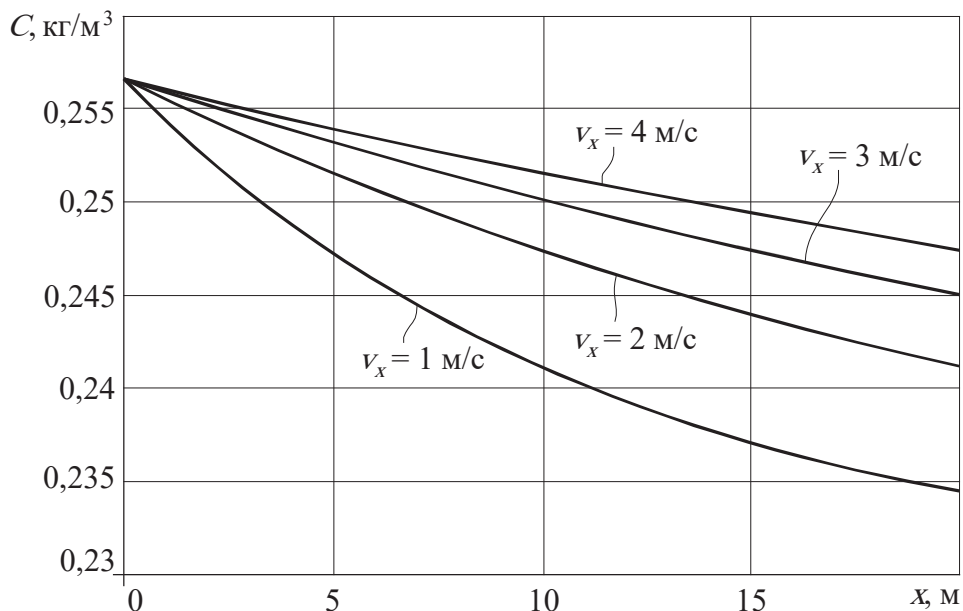


Рис. 3. Графики изменения концентрации реагирующего газа вдоль выработки при различной скорости течения пылегазовоздушной смеси

При этом отметим, что снижение концентрации газа зависит от скорости воздушного потока в горной выработке. Чем ниже скорость потока, тем более существенно снижение концентрации газа вглубь выработки. И, наоборот, с увеличением скорости воздушного потока концентрация газа снижается незначительно, что, на наш взгляд, обусловлено конвективным переносом реагирующего газа.

На рис. 4 представлены графики, харак-

теризующие зависимость концентрации реагирующего газа от параметра Ω в поперечном сечении горной выработки на расстоянии $x = 2$ м от начала координат. Графики показывают, что с увеличением параметра Ω концентрация реагирующего газа нелинейно уменьшается, особенно в интервале $\Omega \in [500; 2000]$. Дальнейший рост параметра Ω уже незначительно влияет на снижение концентрации реагирующего газа.

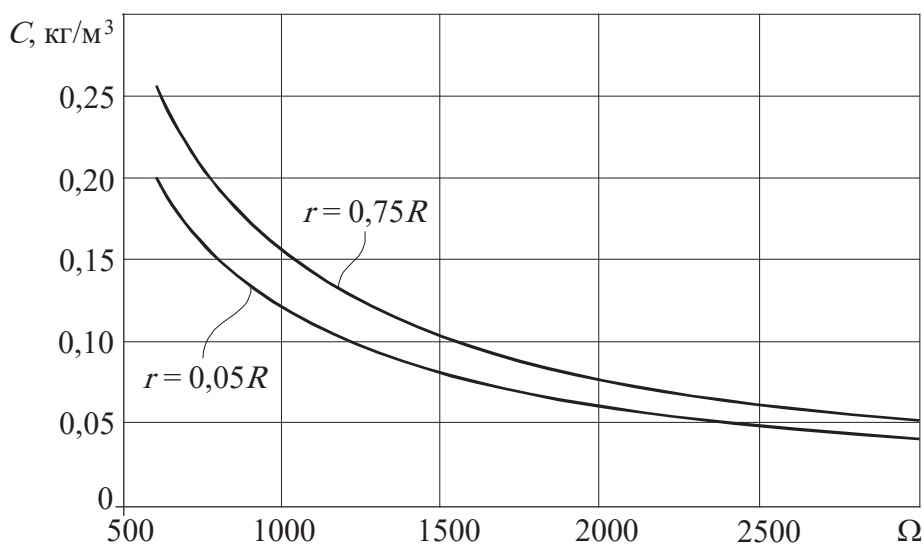


Рис.4. Графики зависимости концентрации реагирующего газа в поперечном сечении выработки от параметра Ω

Поскольку параметр Ω прямо пропорционален константе скорости реакции k и радиусу выработки R и обратно пропорционален коэффициенту диффузии D , то, очевидно, что с увеличением k и R концентрация реагирующего газа будет уменьшаться, а с увеличением D , наоборот, расти.

Выводы

1. Сформулирована краевая задача о массопереносе реагирующего газа в горной выработке с учетом молекулярной диффузии и конвекции, обусловленной скоростью воздушного потока в выработке.

2. В процессе построения решения краевой задачи методом Фурье найдены ее собст-

венные значения и соответствующие им собственные функции. Выполнен краткий анализ сходимости решений краевой задачи.

3. В процессе анализа полученного решения задач установлено:

– по мере удаления от начала координат вглубь выработки концентрация реагирующего газа снижается, причем тем сильнее, чем ниже скорость воздушного потока в выработке;

– с увеличением константы скорости реакции и радиуса выработки концентрация реагирующего газа в поперечном сечении выработки уменьшается, а с ростом коэффициента диффузии D , наоборот, увеличивается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линденау Н.И., Маевская В.М., Крылов В.Ф. Происхождение, профилактика и тушение эндогенных пожаров в угольных шахтах. М.: Недра, 1977. 320 с.

2. Chanyshev A.I. A method to determine a body's thermal state // Journal of Mining Science. 2012. Vol. 48. Issue 4. P. 660–668.

3. Cherdantsev S.V., Shlapakov P.A., Erastov A.Yu., Khaymin S.A., Lebedev K.S., Kolykhalov V.V., Shlapakov E.A. Investigation of the temperature field in the areas of rock and coal concentration near the self-heating zone // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. International Scientific and Research Conference on Knowledge-Based Technologies in Development and Utilization of Mineral Resources 2019. KTDUMR. 2019. P. 012049.

4. Черданцев С.В., Шлапаков П.А. Анализ состояния пылегазовоздушных смесей в атмосфере горных выработок в окрестности очагов самонагрева // Безопасность труда в промышленности. 2019. № 10. С. 15–21.

5. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука. 1987. 502 с.

6. Виленский Т.В., Хзмалян Д.М. Динамика горения пылевидного топлива. М.: Наука. 1977. 248 с.

7. Канторович Б.В. Основы теории горения и газификации твердого топлива. М.: Книга по требованию. 2013. 601 с.

8. Амельчугов С.П., Быков В.И., Цыбенкова С.Б. Самовозгорание пыли бурого угля. Эксперимент, определение кинетических параметров и численное моделирование // Физика горения и взрыва. 2002. № 3. С. 48–54.

9. Черданцев С.В., Ли Хи Ун, Филатов Ю.М., Шлапаков П.А. Анализ процесса горения микрогетерогенных пылегазовоздушных смесей в горных выработках // Безопасность труда в промышленности. 2017. № 11. С. 10–15.

10. Черданцев С.В., Ли Хи Ун, Филатов Ю.М., Ботвенко Д.В., Шлапаков П.А., Колыхалов В.В. Горение мелкодисперсных пылегазовоздушных смесей в атмосфере горных выработок // ФТПРПИ. 2018. № 2. С. 172–180.

11. Черданцев С.В., Филатов Ю.М., Шлапаков П.А. Режимы диффузионного горения мелкодисперсных пылегазовоздушных смесей в атмосфере горных выработок // Уголь. 2020. № 2. С. 27–32.

12. Shevchuk V.G., Kondratev E.N., Zolotko A.N., Sidorov A.E., Oparin A.S. Wave regimes of dust combustion // Combustion, Explosion, and Shock Waves. 2014. Vol. 50. Issue 1. P. 80–86.

13. Sidorov A.E., Shevchuk V.G., Kondratev E.N. Conductive-radiative model of a laminar flame in dust suspensions // *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 2013. Vol. 49. Issue 3. P. 257–263.

14. Левин В.А., Туник Ю.В. Инициирование детонационного горения угольной пыли в метановоздушной смеси // *Физика горения и взрыва*. 1987. № 1. С. 3–8.

15. Черданцев С.В., Шлапаков П.А., Ерастов А.Ю., Хаймин С.А., Лебедев К.С., Колыхалов В.В., Шлапаков Е.А. Моделирование процесса молекулярной диффузии реагирующего газа к покоящейся грубодисперсной угольной частице в горной выработке // *Вестник Научного центра ВостНИИ по промышленной и экологической безопасности*. 2017. № 4. С. 13–21.

16. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. СПб.: Издательство «Лань», 2005. 736 с.

17. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.

18. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.

19. Манзон Б.М. Maple V. Power Edition. М.: Информационно-издательский дом «Филин», 1998. 240 с.

DOI: 10.25558/VOSTNII.2022.70.98.004

UDC 622.272:516.02

© S.V. Cherdantsev, P.A. Shlapakov, S.I. Goloskokov, K.S. Lebedev, A.Yu. Erastov, E.A. Shlapakov, 2022

S.V. CHERDANTSEV

Doctor of Engineering Sciences,
Leading Researcher
JSC «NC VostNII», Kemerovo
e-mail: svch01@yandex.ru

P.A. SHLAPAKOV

Candidate of Engineering Sciences,
Head of Laboratory
JSC «NC VostNII», Kemerovo
e-mail: shlapak1978@mail.ru

S.I. GOLOSKOKOV

Candidate of Engineering Sciences,
Head of Laboratory
JSC «NC VostNII», Kemerovo
e-mail: s.goloskokov@nc-vostnii.ru

K.S. LEBEDEV

Research Associate
JSC «NC VostNII», Kemerovo
e-mail: lebedevks1987@yandex.ru

A.Yu. ERASTOV

Senior Research Associate
JSC «NC VostNII», Kemerovo
e-mail: eractov_a_y@mail.ru

E.A. SHLAPAKOV

Researcher

JSC «NC VostNII», Kemerovo

e-mail: lairxx@yandex.ru

ON MASS TRANSFER OF REACTING GAS IN PRODUCTION OF ROUND CROSS SECTION PASSED ALONG COAL BED

During the development of coal deposits, dust and air mixtures are formed that are predisposed to chemical reactions manifested in the form of normal combustion or detonation. The first stage of any chemical reaction is mass transfer of the reacting gas to the mixture, carried out by molecular diffusion. A feature of the chemical response in mine workings is the presence of two zones, in one of which there is a chemical reaction of carbon oxidation, and in the other there is a reduction of carbon dioxide. Since these zones are spatially separated, the processes taking place in them can be considered separately. In this case, the carbon monoxide combustion process may not be taken into account in the carbon oxidation zone, but it is necessary to take into account the change in the concentration of the reacting gas both in the plane of the cross section of the production and along its longitudinal axis. This makes it very difficult to solve the problems of chemical reaction of mixtures in mine workings compared to the reaction of individual coal particles. Therefore, this paper considers the spatial axisymmetric problem of mass transfer of a reacting gas, which takes into account not only molecular diffusion, but also convective mass transfer due to the gas flow rate. In the process of solving the boundary problem by the method of separating variables, the eigenvalues and their corresponding eigenfunctions were found that describe the mass transfer of the reacting gas in mining. Graphs of changes in the concentration of reacting gas to the working walls and along its axis are built and some regularities are revealed.

Keywords: MINING, GAS-AIR MIXTURES, MOLECULAR DIFFUSION, CONVECTION, MIXED EDGE PROBLEM, FOURIER METHOD, BESSEL FUNCTIONS.

REFERENCES

1. Lindenau N.I., Maevskaya V.M., Krylov V.F. Origin, prevention and extinguishing of endogenous fires in coal mines. M.: Nedra, 1977. 320 p. [In Russ.].
2. Chanyshv A.I. A method to determine a body's thermal state // Journal of Mining Science. 2012. Vol. 48. Issue 4. P. 660–668.
3. Cherdantsev S.V., Shlapakov P.A., Erastov A.Yu., Khaymin S.A., Lebedev K.S., Kolykhalov V.V., Shlapakov E.A. Investigation of the temperature field in the areas of rock and coal concentration near the self-heating zone // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. International Scientific and Research Conference on Knowledge-Based Technologies in Development and Utilization of Mineral Resources 2019. KTDUMR. 2019. P. 012049.
4. Cherdantsev S.V., Shlapakov P.A. Analysis of the state of dust-gas-air mixtures in the atmosphere of mine workings in the vicinity of self-heating centers // Labor safety in industry [Bezopasnost truda v promyshlennosti]. 2019. No. 10. P. 15–21. [In Russ.].
5. Frank-Kamenetsky D.A. Diffusion and heat transfer in chemical kinetics. M.: Science, 1987. 502 p. [In Russ.].
6. Vilensky T.V., Khzmalyan D.M. Dynamics of combustion of pulverized fuel. M.: Science, 1977. 248 p. [In Russ.].
7. Kantorovich B.V. Fundamentals of the theory of combustion and gasification of solid fuels. M.: Book on demand, 2013. 601 p. [In Russ.].
8. Amelchugov S.P., Bykov V.I., Tsybenova S.B. Spontaneous combustion of brown coal dust. Experiment, determination of kinetic parameters and numerical simulation // Physics of Combustion and Explosion [Fizika goreniya i vzryva]. 2002. No. 3. P. 48–54. [In Russ.].
9. Cherdantsev S.V., Li Hi Un, Filatov Yu.M., Shlapakov P.A. Analysis of the process of combustion

of microheterogeneous dust-gas-air mixtures in mine workings // Labor safety in industry [Bezopasnost truda v promyshlennosti]. 2017. No. 11. P. 10–15. [In Russ.].

10. Cherdantsev S.V., Lee Hi Un, Filatov Yu.M., Botvenko D.V., Shlapakov P.A., Kolykhalov V.V. Combustion of fine dust-gas-air mixtures in the atmosphere of mine workings // FTTPRPI [Physical and technical problems of mining]. 2018. No. 2. P. 172–180. [In Russ.].

11. Cherdantsev S.V., Filatov Yu.M., Shlapakov P.A. Modes of diffusion combustion of fine dust-gas-air mixtures in the atmosphere of mine workings // Coal [Ugol]. 2020. No. 2. P. 27–32. [In Russ.].

12. Shevchuk V.G., Kondratev E.N., Zolotko A.N., Sidorov A.E., Oparin A.S. Wave regimes of dust combustion // Combustion, Explosion, and Shock Waves. 2014. Vol. 50. Issue 1. P. 80–86.

13. Sidorov A.E., Shevchuk V.G., Kondratev E.N. Conductive-radiative model of a laminar flame in dust suspensions // Combustion, Explosion, and Shock Waves. 2013. Vol. 49. Issue 3. P. 257–263.

14. Levin V.A., Tunik Yu.V. Initiation of detonation combustion of coal dust in methane-air mixture // Physics of combustion and explosion [Fizika gorenija i vzryva]. 1987. No. 1. P. 3–8. [In Russ.].

15. Cherdantsev S.V., Shlapakov P.A., Erastov A.Yu., Khaimin S.A., Lebedev K.S., Kolykhalov V.V., Shlapakov E.A. Modeling the process of molecular diffusion of a reacting gas to a coarsely dispersed coal particle at rest in a mine working // Bulletin of the Scientific Center of the VostNII for Industrial and Ecological Safety [Vestnik Nauchnogo tsentra VostNII po promyshlennoj i ekologicheskoj bezopasnosti]. 2017. No. 4. P. 13–21. [In Russ.].

16. Bermant A.F., Aramanovich I.G. A short course in mathematical analysis. St. Petersburg: Lan publishing house, 2005. 736 p. [In Russ.].

17. Cherny G.G. Gas dynamics. M.: Nauka, 1988. 424 p. [In Russ.].

18. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Equations in partial derivatives of mathematical physics. M.: Higher school, 1970. 712 p. [In Russ.].

19. Manzon B.M. Maple V. Power Edition. M.: Information and publishing house «Filin», 1998. 240 p. [In Russ.].